

damit -- 24 21 24 21

durch eine trigonometrische Reihe.

241

δ beliebig klein gemacht werden; dasselbe gilt daher von s , und es ergibt sich also:

Damit die Summe S , wenn sämtliche δ unendlich klein werden, convergirt, ist ausser der Endlichkeit der Function $f(x)$ noch erforderlich, dass die Gesamtgrösse der Intervalle, in welchen die Schwankungen $> \sigma$ sind, was auch σ sei, durch geeignete Wahl von δ beliebig klein gemacht werden kann.

Dieser Satz lässt sich auch umkehren:

Wenn die Function $f(x)$ immer endlich ist, und bei unendlichem Abnehmen sämtlicher Grössen δ die Gesamtgrösse s der Intervalle, in welchen die Schwankungen der Function $f(x)$ grösser, als eine gegebene Grösse σ , sind, stets zuletzt unendlich klein wird, so convergirt die Summe S , wenn sämtliche δ unendlich klein werden.

Denn diejenigen Intervalle, in welchen die Schwankungen $> \sigma$ sind, liefern zur Summe $\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \dots + \delta_n D_n$ einen Beitrag, kleiner als s , multiplicirt in die grösste Schwankung der Function zwischen a und b , welche (n. V.) endlich ist; die übrigen Intervalle einen Beitrag $< \sigma(b - a)$. Offenbar kann man nun erst σ beliebig klein annehmen und dann immer noch die Grösse der Intervalle (n. V.) so bestimmen, dass auch s beliebig klein wird, wodurch der Summe $\delta_1 D_1 + \dots + \delta_n D_n$ jede beliebige Kleinheit gegeben, und folglich der Werth der Summe S in beliebig enge Grenzen eingeschlossen werden kann.

Einschließen

24 24

Wir haben also Bedingungen gefunden, welche nothwendig und hinreichend sind, damit die Summe S bei unendlichem Abnehmen der Grössen δ convergire und also im engeren Sinne von einem Integrale der Function $f(x)$ zwischen a und b die Rede sein könne. (2)

24

Wird nun der Integralbegriff wie oben erweitert, so ist offenbar, damit die Integration durchgehends möglich sei, die letzte der beiden gefundenen Bedingungen auch dann noch nothwendig; an die Stelle der Bedingung, dass die Function immer endlich sei, aber tritt die Bedingung, dass die Function nur bei Annäherung des Arguments an einzelne Werthe unendlich werde, und dass sich ein bestimmter Grenzwert ergebe, wenn die Grenzen der Integration diesen Werthen unendlich genähert werden.

treten

24

After

6.

Nachdem wir die Bedingungen für die Möglichkeit eines bestimmten Integrals im Allgemeinen, d. h. ohne besondere Voraussetzungen über die Natur der zu integrierenden Function, untersucht haben, soll nun diese Untersuchung in besonderen Fällen theils angewandt, theils